数理解析研究所講究録
837 巻 1993 年 164-177

Multiple Sine Functions

東大・数理　黒川信重 (Nobushige Kurokawa)

§0. 歴史

(1) サイン(正弦)関数 … アルキメデス, …, オイラー, …, ディリクレ, …
(加法公式)　1748　1840

↓

(2) "2重サイン関数" (名前なし) … ヘルダー, 新谷
1886　1977

↓

(3) 多重サイン関数 (黒川 1990)

ここでは, (1) における基本的性質として次の2つを取り挙げる。簡単のため $S_1(x) = 2\sin(\pi x)$ とおく。

(1-a) 分布性 (distribution property) = 乗法公式:

$$S_1(Nx) = \prod_{k=0}^{N-1} S_1\left(x + \frac{k}{N}\right),$$

とくに

$$\prod_{k=1}^{N-1} S_1\left(\frac{k}{N}\right) = N.$$

(1-b) ディリクレの定理 ("類数公式"の書き換え):

χ を mod N $(N \geqq 2)$ の原始偶指標とするとき

その ディリクレ L 関数

$$L(s,\chi) = \prod_p (1-\chi(p)p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

に対して，　$s=0$ は　1位の零点であり

$$L'(0,\chi) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \log S_1\left(\frac{k}{N}\right).$$

これは，通常，関数等式 $L(s,\chi) \leftrightarrow L(1-s,\bar{\chi})$ を通して

$$L(1,\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \bar{\chi}(k) \log S_1\left(\frac{k}{N}\right),$$

$$\tau(\chi) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) e^{2\pi i k/N} \quad \text{はガウス和},$$

と書かれるものと同値である。

(2)　においてヘルダー[2]は“2重サイン関数”と呼ばれるべき関数を導入し，新谷[6]は（ヘルダーを引用していないが）少し変形した“2重サイン関数”を扱ったが，両者とも記号 $F(z)$ を用いており名前を付けておらず　サイン関数の“2重版”であることがわかりにくくなっている。新谷は (1−b) の実2次体のL関数への拡張を示した。詳しくは新谷[6]を参照されたいが，実2次体 K とある型の指標 χ に対して $L_K'(0,\chi)$ が“2重サイン関数”（$S_2(x,\underline{\omega})$ と§3で書くもの）の $\log$ の

1次結合で表わせることを示した。これは，実2次体の類体を構成するというクロネッカーの青春の夢(の実2次体版)に連なる結果である。

(3) における応用としては次の2つがある：

(3-a) セルバーグ・ゼータ関数のガンマ因子の計算。

(3-b) ゼータ関数やL-関数の特殊値の表示。

詳しくは [3]－[5] (1990年8月発表) を参照されたい。

多重サイン関数の拡張の道は次のとおりであり，この順に解説したい：

$\mathcal{S}_r(x)$ ： ヘルダー型多重サイン関数

↓

$S_r(x)$ ： 新谷型多重サイン関数
(特殊{パラメーター, 周期})

↓

$S_r(x;\omega_1,\dots,\omega_r)$ ： 新谷型多重サイン関数
(一般{パラメーター, 周期})

§1. ヘルダー型多重サイン関数 $\mathcal{S}_r(x)$

$r \geqq 2$ に対して

$$P_r(x) = (1-x)\exp\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^r}{r}\right)$$

とおき，ヘルダー型多重サイン関数 $\mathcal{S}_r(x)$ を次のように定義する：

$$\mathcal{S}_r(x) = \exp\left(\frac{x^{r-1}}{r-1}\right)\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' P_r\left(\frac{x}{n}\right)^{n^{r-1}}$$

$$= \exp\left(\frac{x^{r-1}}{r-1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(P_r\left(\frac{x}{n}\right)P_r\left(-\frac{x}{n}\right)^{(-1)^{r-1}}\right)^{n^{r-1}}.$$

また

$$\mathcal{S}_1(x) = 2\sin(\pi x) = 2\pi x\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' P_1\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= 2\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

とおく。

たとえば

$$\mathcal{S}_2(x) = e^{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n} e^{2x}\right\},$$

$$\mathcal{S}_3(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} e^{x^2}\right\}$$

である。ヘルダー[2]が研究したのは $\mathcal{S}_2(x)$ である。

基本性質 $(r \geqq 2)$:

① 微分方程式

(a)
$$\begin{cases} \dfrac{\mathcal{S}_r'}{\mathcal{S}_r}(x) = \pi\, x^{r-1}\cot(\pi x), \\ \mathcal{S}_r(0) = 1. \end{cases}$$

(b)（代数的微分方程式）

$$\begin{cases} \mathcal{S}_r''(x) = (1-x^{1-r})\mathcal{S}_r'(x)^2\mathcal{S}_r(x)^{-1} + (r-1)x^{-1}\mathcal{S}_r'(x) \\ \qquad\qquad - \pi^2 x^{r-1}\mathcal{S}_r(x), \\ \mathcal{S}_r(0) = 1, \\ \mathcal{S}_r'(0) = \begin{cases} 1 & \cdots\ r=2 \\ 0 & \cdots\ r \geqq 3. \end{cases} \end{cases}$$

［$r=1$ のときは $\mathcal{S}_1''(x) = -\pi^2\mathcal{S}_1(x)$ と線型になるが，$r \geqq 2$ では非線型．］

② 積分表示

$$\mathcal{S}_r(x) = \exp\left(\int_0^x \pi t^{r-1}\cot(\pi t)\,dt\right),$$

ここで $\int_0^x \subset \mathbb{C} - \{\pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

③ ガンマ関数の多重版との関係：

"r 重ガンマ関数" $\Gamma_r(x)$ を

$$g_r(x) = \exp\left((-1)^r \frac{x^{r-1}}{2(r-1)}\right) \prod_{n=1}^{\infty} P_r\left(-\frac{x}{n}\right)^{-n^{r-1}}$$

と定義すると

$$\mathcal{S}_r(x) = g_r(x)^{(-1)^r} g_r(-x)^{-1}.$$

これは

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \Gamma(1+x)^{-1}\Gamma(1-x)^{-1}$$

というオイラーによる有名な関係式の類似である。

④

周期性：$\mathcal{S}_r(x+1) = \mathcal{S}_r(x) \times (\text{lower order})$.

分布性：

$$\mathcal{S}_r(Nx) = \left\{ \mathcal{S}_r(x)\mathcal{S}_r\left(x+\frac{1}{N}\right)\cdots\mathcal{S}_r\left(x+\frac{N-1}{N}\right)\right\}^{N^{r-1}}$$
$$\times (\text{lower order}).$$

⑤ 多重対数との関係：　$\mathrm{Im}(x)<0$ のとき

$$\mathcal{S}_r(x) = \exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(2\pi i)^k}{k!} x^k \, Li_{r-k}(e^{-2\pi i x}) + \frac{\pi i}{r} x^r + \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}} \zeta(r)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}} Li_r(e^{-2\pi i x}) + (\text{lower order})\right).$$

$\mathrm{Im}(x) \geqq 0$ でも同様。ここで、

$$\mathrm{Li}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$$

は多重対数。

⑥ ゼータ関数やL関数の特殊値の表示：

$$\zeta(3) = \frac{8\pi^2}{7} \log\left(\frac{2^{\frac{1}{4}}}{\mathcal{S}_3(\frac{1}{2})}\right),$$

$$\zeta(5) = \frac{32\pi^4}{93} \log\left(\frac{\mathcal{S}_5(\frac{1}{2})\, 2^{11/112}}{\mathcal{S}_3(\frac{1}{2})^{9/14}}\right),$$

$$\vdots$$

（注：$\mathcal{S}_1(\frac{1}{2}) = 2$, $\mathcal{S}_2(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$, $\cdots$ ）

一般には帰納的関係式

$$\zeta(2m+1) = (-1)^m \frac{(4\pi)^{2m}}{(2m)!\,(2^{2m+1}-1)} \log\left(\mathcal{S}_{2m+1}\left(\tfrac{1}{2}\right) 2^{-\frac{1}{4^m}}\right)$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k (2\pi)^{2k} (4^{m-k}-1)}{(2k)!\,(2^{2m+1}-1)} \zeta(2m-2k+1)$$

から

$$\zeta(2m+1) = (\text{有理数}) \times \pi^{2m} \times \log\left(\prod_{\substack{k \leqq 2m+1 \\ \text{奇数}}} \mathcal{S}_k\left(\tfrac{1}{2}\right)^{(\text{有理数})}\right)$$

の形となる。この $\zeta(3)$ の式については多重サイン関数を用いてはいなかったがオイラー（全集Ⅰ-15巻，p.150，1772年）を参照されたい。

次に，χ を原始指標 mod N $(N \geqq 2)$ で $\chi(-1) = (-1)^{r+1}$ とすると，次のようにディリクレ L 関数の特殊値 $L(r, \chi)$，$L'(1-r, \chi)$ が多重サイン関数の対数を用いて表示できる：

$$L(2,\chi) = -\frac{2\pi i}{N}\tau(\chi)\log \prod_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\mathcal{S}_2(\frac{k}{N})}{\mathcal{S}_1(\frac{k}{N})^{\frac{k}{N}}}\right)^{\overline{\chi}(k)},$$

$$L'(-1,\chi) = \frac{1}{2}\log \prod_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\mathcal{S}_2(\frac{k}{N})}{\mathcal{S}_1(\frac{k}{N})^{\frac{k}{N}}}\right)^{\chi(k)},$$

$$L(3,\chi) = \frac{2\pi^2}{N}\tau(\chi)\log \prod_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\mathcal{S}_3(\frac{k}{N})\mathcal{S}_1(\frac{k}{N})^{\frac{k^2}{N^2}}}{\mathcal{S}_2(\frac{k}{N})^{\frac{2k}{N}}}\right)^{\overline{\chi}(k)},$$

$$L'(-2,\chi) = -\frac{1}{2}\log \prod_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\mathcal{S}_3(\frac{k}{N})\mathcal{S}_1(\frac{k}{N})^{\frac{k^2}{N^2}}}{\mathcal{S}_2(\frac{k}{N})^{\frac{2k}{N}}}\right)^{\chi(k)},$$

----。

§2. 新谷型多重サイン関数 $S_r(x)$（特殊パラメーター）

バーンズ型の多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x)$ を多重フルビッツゼータ関数

$$\zeta_r(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_rH_n\,(n+x)^{-s}$$

$$= \sum_{n_1,\cdots,n_r \geqq 0} (n_1+\cdots+n_r+x)^{-s}$$

を用いて $\Gamma_r(x) = \exp(\zeta_r'(0,x))$ と定義する。基本的性質についてはバーンズ[1]を参照。

たとえば $\Gamma_1(x) = \dfrac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$ となる。さらに

新谷型多重サイン関数 $S_r(x)$（特殊パラメーター）を

$$S_r(x) = \Gamma_r(x)^{-1}\,\Gamma_r(r-x)^{(-1)^r}$$

と定義する。たとえば $S_1(x) = 2\sin(\pi x)$ となる。

基本性質 $(r \geqq 2)$

⓪ $$\mathcal{S}_r(x) = C_r \prod_{k=1}^{r} S_k(x)^{c(r,k)},$$

$$C_r = \begin{cases} 1 & \cdots \quad r:\text{even} \\ e^{2\zeta'(1-r)} & \cdots \quad r:\text{odd}, \end{cases}$$

$$c(r,k) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1}\binom{k}{l} l^r \in \mathbb{Z}$$

$$(c(r,r) = (-1)^{r-1}(r-1)!,\ \ldots,\ c(r,1) = 1).$$

① (a) $$\frac{S_r'}{S_r}(x) = {}_rH_{-x}\,\pi\cot(\pi x),$$

ただし、$${}_rH_{-x} = (-1)^{r-1}\binom{x-1}{r-1}.$$

(b) $$S_r''(x) = \left(1 - P(x)^{-1}\right) S_r'(x)^2 S_r(x)^{-1} + P'(x)P(x)^{-1} S_r'(x) - \pi^2 P(x) S_r(x),$$

ただし，$P(x) = {}_rH_{-x}$.

② 周期性: $S_r(x+1) = S_r(x) S_{r-1}(x)^{-1}$

[分布性については より一般に §3 ② 参照]

③ 階数 1 の任意のセルバーグ・ゼータ関数のガンマ因子（単位因子）が多重サイン関数 $S_r(x)$ を通して計算でき，結果は $M = \Gamma\backslash G/K$ のセルバーグ・ゼータ関数 $Z_M(s)$ のガンマ因子 $\Gamma_M(s)$ で書くと次のとおり：

$$\Gamma_M(s) = \begin{cases} \left(\Gamma_{2n}(s)\Gamma_{2n}(s+1)\right)^{vol(M)(-1)^{n-1}} & \cdots\ G = SO(1,2n) \\ \left(\prod_{k=0}^{n} \Gamma_{2n}(s+k)^{\binom{n}{k}^2}\right)^{vol(M)(-1)^{n-1}} & \cdots\ G = SU(1,n) \\ \left(\prod_{k=0}^{2n-1} \Gamma_{4n}(s+k)^{\frac{1}{2n}\binom{2n}{k}\binom{2n}{k+1}}\right)^{-vol(M)} & \cdots\ G = Sp(1,n) \\ \left(\Gamma_{16}(s)\Gamma_{16}(s+1)^{10}\Gamma_{16}(s+2)^{28}\Gamma_{16}(s+3)^{28}\Gamma_{16}(s+4)^{10}\Gamma_{16}(s+5)\right)^{-vol(M)} & \cdots\ G = F_4 \end{cases}$$

$$= \det\left(\sqrt{\Delta_{M'} + \rho_M^2} + s - \rho_M\right)^{vol(M)(-1)^{\dim(M)/2}}.$$

ここで $\Delta_{M'}$ は コンパクト双対対称空間 $M' = G'/K$ のラプラス作用素。

鍵となるのは $Z_M(s)$ の関数等式

$$Z_M(2\rho_M - s) = Z_M(s)\exp\left(\mathrm{vol}(M)\int_0^{s-\rho_M}\mu_M(it)\,dt\right)$$

（$\mu_M(t)$ はプランシェレル測度）において

$$\exp\left(\int_0^{s-\rho_0}\mu_M(it)\,dt\right)^{(-1)^{\dim(M)/2}} = \begin{cases} S_{2n}(s)\,S_{2n}(s+1) & \cdots\ G = SO(1,2n) \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n} S_{2n}(s+k)^{\binom{n}{k}^2} & \cdots\ G = SU(1,n) \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{2n-1} S_{4n}(s+k)^{\frac{1}{2n}\binom{2n}{k}\binom{2n}{k+1}} & \cdots\ G = Sp(1,n) \\ S_{16}(s)S_{16}(s+1)^{10}S_{16}(s+2)^{28}S_{16}(s+3)^{28}S_{16}(s+4)^{10}S_{16}(s+5) & \cdots\ G = F_4 \end{cases}$$

となることであり，したがって，完備化されたゼータ関数

$\hat{Z}_M(s) = Z_M(s)\Gamma_M(s)$ は 対称的関数等式をみたす：

$$\hat{Z}_M(s) = \hat{Z}_M(2\rho_M - s)\ .$$

同時に，プランシェレル測度 $\mu_M(t)$ のベッチ数型の新公式も得る。
詳しくは [3]–[5] を参照されたい。

④ ゼータ関数や L 関数の特殊値の表示は ⓪ を通して §1 と同様である。

§3. 新谷型多重サイン関数 $S_r(x,\underline{\omega})$（一般パラメーター）

パラメーター $\underline{\omega} = (\omega_1, \cdots, \omega_r)$ を"周期"とする多重サイン関数 $S_r(x,\underline{\omega}) = S_r(x;\omega_1,\cdots,\omega_r)$ を次のように

定義する：

$$S_r(x,\underline{\omega}) = \Gamma_r(x,\underline{\omega})^{-1}\,\Gamma_r(|\underline{\omega}|-x,\underline{\omega})^{(-1)^r},$$

$$\Gamma_r(x,\underline{\omega}) = \exp\left(\zeta_r'(0,x,\underline{\omega})\right),$$

$$\zeta_r(s,x,\underline{\omega}) = \sum_{\underline{n}=(n_1,\dots,n_r)\geq \underline{0}} (\underline{n}\cdot\underline{\omega}+x)^{-s}。$$

ただし，$\zeta_r(s,x,\underline{\omega})$ は一般パラメーターの多重フルビッツゼータ関数であり，微分 ζ_r' は s に関するものであり，$\Gamma_r(x,\underline{\omega})$ は一般パラメーターの多重ガンマ関数。

たとえば，$\Gamma_1(x,\omega) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\sqrt{2\pi}}\,\omega^{\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2}}$ より

$$S_1(x,\omega) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)$$

となる。なお，$|\underline{\omega}| = \omega_1+\dots+\omega_r$。また $S_r(x)=S_r(x,(1,\dots,1))$.

基本性質

① 周期性：$S_r(x+\omega_i,\underline{\omega}) = S_r(x,\underline{\omega})\,S_{r-1}(x,\underline{\omega}(i))^{-1}$,

$\underline{\omega}(i) = (\omega_1,\dots,\omega_{i-1},\omega_{i+1},\dots,\omega_r)$。

なお $S_0(x,\phi)=-1$，$\Gamma_0(x,\phi)=\dfrac{1}{x}$，$|\phi|=0$，

$\zeta_0(s,x,\phi) = x^{-s}$ と解釈する。

② 分布性：（乗法公式）$S_r(Nx,\underline{\omega}) = \displaystyle\prod_{\substack{\underline{k}=(k_1,\dots,k_r)\\ k_i=0,\dots,N-1}} S_r\left(x+\frac{\underline{k}\cdot\underline{\omega}}{N},\underline{\omega}\right)$,

$$\prod_{\substack{\underline{k} \\ k_i = 0,\dots,N-1}}{}' S_r\left(\frac{\underline{k}\cdot\underline{\omega}}{N}, \underline{\omega}\right) = N.$$

③ 同次性：($c > 0$ に対して)

$$S_r(cx, c\underline{\omega}) = S_r(x, \underline{\omega})。$$

④ ゼータ関数や L 関数の特殊値の表示：§1, §2 の結果の拡張として n 次総実代数体 K の指標 χ に対して $L_K(s, \chi)$ が $s=0$ で 1 位の零点をもつとき ($\Leftrightarrow$ ガンマ因子が $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{n-1}$) ある $\alpha_j \in K$ を用いて

$$L'_K(0, \chi) \doteqdot \sum_j c_j \log S_{r_j}(\alpha_j, \underline{\omega}_j)$$

の形の有限和表示が得られる。ただし, $r_j \leqq n$.

これは $n=1$ のときは §0 で述べたディリクレの結果 (1840), $n=2$ のときは 新谷 [6] (1977) の結果の拡張になる。 とくに

$$\exp(L'_K(0, \chi)) \doteqdot \prod_j S_{r_j}(\alpha_j, \underline{\omega}_j)^{c_j}$$

が 新谷－Stark の仮想単数の表示を与えている。

§1－§3 の記述から明らかなように多重サイン関数の特殊値の研究は重要な課題である。

文献

[1] E.W. Barnes: "On the theory of the multiple gamma function" Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904) 374–425.

[2] O. Hölder: "Ueber eine transcendente Function" Göttingen Nachrichten 1886, Nr. 16, pp. 514–522.

[3] N. Kurokawa: "Multiple sine functions and Selberg zeta functions" Proc. Japan Acad. 67A (1991) 61–64.

[4] ——: "Gamma factors and Plancherel measures" Proc. Japan Acad. 68A (1992) 256–260.

[5] ——: "Multiple zeta functions: an example" Advanced Studies in Pure Math. vol 21 (1992) pp. 219–226 = Proc. of "Zeta Functions in Geometry" (Tokyo, 1990 Aug.) edited by N. Kurokawa and T. Sunada; Kinokuniya, Tokyo.

[6] T. Shintani: "On a Kronecker limit formula for real quadratic fields" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24 (1977) 167–199.